



第一章

集合与常用逻辑用语

1.1 集合的概念



对点上分

1. C 【解析】A 选项，“个子高”是不明确的说法，故某学校个子高的学生不能构成集合，A 错误；

B 选项，“受欢迎”是不明确的说法，故巴黎奥运会上受欢迎的运动员不能构成集合，B 错误；

C 选项，2024 年参加“两会”的代表是明确的，则 2024 年参加“两会”的代表能构成集合，C 正确；

D 选项，精确度未确定的情况下，“ π 的近似值”是不明确的说法，故其不能构成集合，D 错误。

故选 C.

2. C 【解析】因为 a, b, c, d 为集合 M 的四个元素，所以这四个元素均不相等，而等腰梯形的两腰相等，菱形的四条边都相等，矩形的两组对边分别相等，故该四边形不可能是等腰梯形、菱形、矩形，即 A, B, D 错误，C 正确. 故选 C.

3. C 【解析】对于 A，0 是数字不是集合， $\{0\}$ 表示以 0 为元素的一个集合，故 A 错误；

对于 B， $\{x | (x-2)^2(x-3)=0\} = \{2, 3\}$ ，故 B 错误；

对于 C，根据集合中元素的无序性，可得由 3, 4, 5 组成的集合可表示为 $\{3, 4, 5\}$ 或 $\{4, 5, 3\}$ ，故 C 正确；

对于 D，由集合中元素的确定性可知“很小的实数”是不明确的，可得很小的实数不能构成集合，故 D 错误。

故选 C.

4. D 【解析】对于 A，由 π 是无理数，得 π^2 也是无理数，则 $\pi^2 \notin \mathbf{Q}$ ，A 错误；

对于 B，自然数集 \mathbf{N} 包含元素 0，即 $0 \in \mathbf{N}$ ，B 错误；

对于 C， \mathbf{Z} 表示整数集，即 $-4 \in \mathbf{Z}$ ，C 错误；



对于 D, $-2\ 024$ 是实数, 即 $-2\ 024 \in \mathbf{R}$, D 正确.

故选 D.

5. B 【解析】对于 A: 由 $\begin{cases} x-y=3, \\ x+y=-1 \end{cases}$ 解得

$$\begin{cases} x=1, \\ y=-2, \end{cases} \text{ 不满足 } y=2x, \text{ 故 } (3, -1) \notin M, \text{ 故}$$

A 错误;

$$\text{对于 B: 由 } \begin{cases} x-y=-1, \\ x+y=3 \end{cases} \text{ 解得 } \begin{cases} x=1, \\ y=2, \end{cases} \text{ 满足 } y=$$

$2x$, 故 $(-1, 3) \in M$, 故 B 正确;

$$\text{对于 C: 由 } \begin{cases} x-y=-1, \\ x+y=2 \end{cases} \text{ 解得 } \begin{cases} x=\frac{1}{2}, \\ y=\frac{3}{2}, \end{cases} \text{ 不满足}$$

$y=2x$, 故 $(-1, 2) \notin M$, 故 C 错误;

$$\text{对于 D: 由 } \begin{cases} x-y=2, \\ x+y=-1 \end{cases} \text{ 解得 } \begin{cases} x=\frac{1}{2}, \\ y=-\frac{3}{2}, \end{cases} \text{ 不满足}$$

$y=2x$, 故 $(2, -1) \notin M$, 故 D 错误.

故选 B.

6. A 【解析】因为 $-3 \in A$, 所以 $a-2=-3$ 或 $a^2+4a=-3$.

当 $a-2=-3$, 即 $a=-1$ 时, $A=\{-3, -3, 10\}$, 不符合集合中元素的互异性, 故 $a=-1$ 不符合题意,

当 $a^2+4a=-3$, 即 $a=-1$ (舍) 或 $a=-3$ 时, $A=\{-5, -3, 10\}$, 符合题意, 故 a 的值为 -3 .

故选 A.

易错警示 忽略对集合中元素的互异性的检验

本题是含参数的集合问题, 根据题意求出参数的值后要注意检验参数的值是否满足集合中元素的互异性. 本题的易错之处是忽视检验 $a=-1$ 时是否满足集合中元素的互异性.

7. C 【解析】联立 $\begin{cases} x+y=0, \\ x^2-y=2, \end{cases}$

$$\text{解得 } \begin{cases} x=1, \\ y=-1 \end{cases} \text{ 或 } \begin{cases} x=-2, \\ y=2, \end{cases}$$

所以方程组 $\begin{cases} x+y=0, \\ x^2-y=2 \end{cases}$ 的解集是 $\{(1,$



$-1), (-2, 2)\}$.

故选 C.

易错警示 忽略点集与数集的区别致错

在根据条件表示集合的过程中,要注意集合中元素的意义,通常来讲,数集是由数构成的集合,元素以数字的形式罗列出来;点集是由点构成的集合,元素是以坐标形式表示出来的点.

8. C 【解析】依题意, $M = \{(1, 16), (2, 8), (4, 4), (8, 2), (16, 1)\}$, 所以 M 中元素的个数为 5. 故选 C.

9. 【解】(1) 用描述法表示为 $\{x \in \mathbf{Q} \mid 2 < x < 5\}$.

(2) 用列举法表示为 $\{1, 2, 3, 4, 6, 8, 12, 24\}$.

(3) 在平面直角坐标系内, 点 (x, y) 到 x 轴的距离为 $|y|$, 到 y 轴的距离为 $|x|$, 所以该集合用描述法表示为 $\{(x, y) \mid |y| = |x|\}$.

方法总结

(1) 用列举法表示集合时, 要先弄清集合中的元素是什么, 是数是点还是其他元素. 当元素是数时, 元素与元素之间要用“,” 隔开; 当集合中的元素是点时, 应将有序实数对用小括号括起来表示一个元素.

(2) 用描述法表示集合时应注意四点: ①写清楚该集合中元素的代号; ②说明该集合中元素的性质; ③所有描述的内容都可写在集合符号内; ④在描述法的一般形式 $\{x \in I \mid p(x)\}$ 中, “ x ” 是集合中元素的代表形式, “ I ” 是 x 的范围, “ $p(x)$ ” 是集合中元素 x 的共同特征, 竖线不可省略.

1.2 集合间的基本关系



对点上分

1. B 【解析】集合 $D = \left\{ (x, y) \mid \begin{cases} x+y=4 \\ 2x-y=2 \end{cases} \right\} = \{(2, 2)\}$, 而集合 $C = \{(x, y) \mid y=x\}$, 表示直线 $y=x$ 上所有点组成



的集合,所以 $D \subseteq C$. 故选 B.

2. C 【解析】 \because 方程 $x^2 - 1 = 0$ 的解组成的集合为 $\{-1, 1\}$, $\therefore \{x | x^2 - 1 = 0\} = \{-1, 1\}$, 故①正确;

$\because \{y | y = 2x^2 + 1\} = \{y | y \geq 1\}$, $\{x | y = 2x^2 + 1\} = \mathbf{R}$, $\therefore \{y | y = 2x^2 + 1\} \neq \{x | y = 2x^2 + 1\}$, 故②错误;

$\because \left\{x \mid x = \frac{1 - (-1)^n}{2}, n \in \mathbf{N}\right\} = \{0, 1\}$,

$\{x | -1 < x < 2, x \in \mathbf{N}\} = \{0, 1\}$, $\therefore \left\{x \mid x = \frac{1 - (-1)^n}{2}, n \in \mathbf{N}\right\} = \{x | -1 < x < 2, x \in \mathbf{N}\}$,

故③正确;

$\because \{(x, y) | y = \sqrt{x-1} + \sqrt{1-x}\}$ 是点集, $\{0, 1\}$ 是数集, $\therefore \{(x, y) | y = \sqrt{x-1} + \sqrt{1-x}\} \neq \{0, 1\}$, 故④错误. 故选 C.

3. 【解】(1) 因为 $x^2 + 2x - m + 6 = 0$ 有实根, 所以 $\Delta = 4 - 4 \times 1 \times (-m + 6) \geq 0$, 解得 $m \geq 5$, 所以 $A = \{m | m \geq 5\}$.

(2) 当 $B = \emptyset$ 时, $3a - 1 < 2a - 1$, 解得 $a < 0$;

当 $B \neq \emptyset$ 时, 因为 $B \subseteq A$, 所以

$$\begin{cases} 2a - 1 \leq 3a - 1, \\ 2a - 1 \geq 5, \end{cases} \text{解得 } a \geq 3.$$

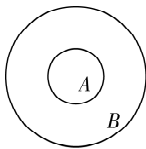
综上所述, 实数 a 的取值范围是 $\{a | a < 0 \text{ 或 } a \geq 3\}$.

易错警示 忽视对子集为空集的讨论

求解含参数的集合是确定集合的子集或真子集时, 应考虑该集合为空集的特殊情况, 因此本题求解的易错之处是忽视集合 B 为空集的特殊情况而导致漏解.

4. BD 【解析】空集是任何集合的子集, 是任何非空集合的真子集, 故选项 A 错误; 子集具有传递性, 故选项 B 正确; 若一个集合是空集, 则没有真子集, 故选项 C 错误;

由 Venn 图易知选项 D 正确. 故选 BD.



5. B



攻略上分 根据题意将集合 $P-Q$

用列举法表示出来, 可得其元素个数, 利用攻略中的公式求解即可.



【解析】集合 $P = \{4, 5, 6\}$, $Q = \{1, 2, 3\}$,
 定义 $P-Q = \{x | x = p-q, p \in P, q \in Q\}$,
 则 $P-Q = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, 元素个数为 5,
 故集合 $P-Q$ 的所有真子集的个数为 $2^5 - 1 = 31$, 故选 B.

6. C



攻略上分

对于具有连续包含关系的三个集合, 攻略中给出各种情况下中间集合个数的计算公式, 对于本题, 只需求解左、右两个集合的元素个数, 再代入公式计算即可.

【解析】解方程 $x^2 - 2x - 3 = 0$ 得 $x_1 = 3, x_2 = -1$, 则 $\{x | x^2 - 2x - 3 = 0\} = \{-1, 3\}$.
 因为 $\{x | x^2 - 2x - 3 = 0\} = \{-1, 3\} \subseteq A \subsetneq \{-1, 0, 1, 2, 3\}$,
 所以集合 A 的个数为 $2^{5-2} - 1 = 2^3 - 1 = 7$.

提示: 公式详见通法攻略 1

故选 C.

7. 【解】(1) 因为集合 $M = \{x | x < 2 \text{ 且 } x \in \mathbf{N}\}$, 所以集合 $M = \{0, 1\}$, 所以集合 M 的子集为 $\emptyset, \{0\}, \{1\}, \{0, 1\}$,
 集合 M 的真子集为 $\emptyset, \{0\}, \{1\}$.
 (2) 因为 $N = \{x | -2 < x < 2 \text{ 且 } x \in \mathbf{Z}\}$, 所以集合 $N = \{-1, 0, 1\}$.
 所以集合 N 的子集为 $\emptyset, \{-1\}, \{1\}, \{0\}, \{-1, 1\}, \{0, 1\}, \{0, -1\}, \{-1, 0, 1\}$, 共 8 个;
 集合 N 的非空真子集为 $\{-1\}, \{1\}, \{0\}, \{-1, 1\}, \{0, 1\}, \{0, -1\}$, 共 6 个.

8. BCD 【解析】 $\emptyset \subseteq \emptyset$ 或 $\emptyset = \emptyset$, 故 A 错误, B 正确;
 \emptyset 是集合 $\{\emptyset\}$ 的元素, \emptyset 也是任何集合的子集, 即 $\emptyset \in \{\emptyset\}, \emptyset \subseteq \{\emptyset\}$, 故 CD 正确.

易错警示

对空集概念理解得不透彻而致错

对空集概念理解得不透彻以及对集合的表示方法掌握不清晰, 容易导致此处出现问题. 注意: 空集本身就是集合, 空集不包含任何元素, 并且空集是任何集合的子集.



9. AC 【解析】当 $a=0$ 时, 方程无解, 即解集为 \emptyset , 满足题意;

当 $a \neq 0$ 时, 由 $ax^2 = 20$, 得 $x^2 = \frac{20}{a}$, 由于 $x^2 \geq 0$,

所以当且仅当 $a < 0$ 时, 方程无解, 即解集为 \emptyset , 此时也满足题意.

综上, 对比选项可知, 满足题意的实数 a 的可能取值是 -1 或 0 .

故选 AC.



能力上分

1. B 【解析】由于 $x \in \mathbf{N}$, 则 $x = 0, 1, 2, 3, \dots$.

当 $x=0$ 时, $\frac{6}{6-0} = 1 \in \mathbf{N}$;

当 $x=1$ 时, $\frac{6}{6-1} = \frac{6}{5} \notin \mathbf{N}$;

当 $x=2$ 时, $\frac{6}{6-2} = \frac{3}{2} \notin \mathbf{N}$;

当 $x=3$ 时, $\frac{6}{6-3} = \frac{6}{3} = 2 \in \mathbf{N}$;

当 $x=4$ 时, $\frac{6}{6-4} = \frac{6}{2} = 3 \in \mathbf{N}$;

当 $x=5$ 时, $\frac{6}{6-5} = 6 \in \mathbf{N}$;

当 $x=7$ 时, $\frac{6}{6-7} = -6 \notin \mathbf{N}; \dots$

故集合 $M = \{0, 3, 4, 5\}$, 所以集合 M 的子集个数为 $2^4 = 16$. 故选 B.

2. BCD 【解析】因为集合 A 有且仅有 2 个子集, 所以集合 A 中仅有一个元素. 当 $a=0$ 时, 方程化为 $2x=0$, 所以 $x=0$, $A = \{0\}$, 满足题意;

当 $a \neq 0$ 时, 因为集合 A 中仅有一个元素, 所以 $\Delta = 4 - 4a^2 = 0$, 所以 $a = \pm 1$, 此时 $A = \{1\}$ 或 $A = \{-1\}$, 满足题意. 故选 BCD.

3. C 【解析】因为 $\{a, b, c\} \subseteq \{-3, -2, -1, 1, 2, 3\}$, 要使 $a - 2b - 3c$ 的值最大, 所以 a 取 3 , c 取 -3 , b 取 -2 , 则 $a - 2b - 3c \leq 3 + 4 + 9 = 16$. 故选 C.

4. C 【解析】由题意, 错水牌是存在某个要素与模式水牌不符的实际水牌, 即错水牌 \subseteq 实际水牌, 且错水牌一定不是模式水牌, C 正确, A, D 错误,



实际水牌可能存在要素与模式水牌不符,则实际水牌不包含于模式水牌, B 错误.

故选 C.

- 5. D 【解析】**由题意可知,集合 A 中一定含有元素 a_1, a_2, \dots, a_m , 可能含有元素 b_1, b_2, \dots, b_n , 但 $A \neq \{a_1, a_2, \dots, a_m, b_1, b_2, \dots, b_n\}$, 则集合 A 的个数为 $2^n - 1$, 故选 D.

- 6. B 【解析】**假设① $a \neq -1$, ② $b = -1$ 错误, ③ $c \neq 0$ 正确, 因为 $\{a, b, c\} = \{-1, 0, 1\}$, 所以有 $a = -1$, $b = 0, c = 1$, 此时 $a^{2025} - 2b + 4c = -1 + 4 = 3$; 假设① $a \neq -1$, ③ $c \neq 0$ 错误, ② $b = -1$ 正确, 因为 $a \neq -1$ 错误, 所以必有 $a = -1$, 而 $b = -1$, 不符合集合中元素的互异性, 故假设不成立; 假设② $b = -1$, ③ $c \neq 0$ 错误, ① $a \neq -1$ 正确, 因为 $c \neq 0$ 错误, 所以 $c = 0$, 因为 $b = -1$ 错误, 所以 $b \neq -1$ 正确, 而 $a \neq -1$ 正确, 因此只能 $a = b = 1$, 不符合集合中元素的互异性, 故假设不成立. 综上所述, $a^{2025} - 2b + 4c = 3$. 故选 B.

- 7. $\{a \mid a \leq 0\}$ 【解析】**因为集合 $A = \{x \mid ax^2 - 2ax + a - 1 = 0\} = \emptyset$, 所以 $ax^2 - 2ax + a - 1 = 0$ 无解. 当 $a = 0$ 时, 方程无解, 符合题意; 当 $a \neq 0$ 时, $\Delta = (-2a)^2 - 4a(a - 1) = 4a < 0$, 解得 $a < 0$. 综上所述, 实数 a 的取值范围为 $\{a \mid a \leq 0\}$.

- 8. (1) 【证明】**设 $x_0 \in A$, $\therefore x_0^2 + a = x_0$, 将 x_0 代入方程 $(x^2 + a)^2 + a = x$, 显然成立. $\therefore x_0$ 是方程 $(x^2 + a)^2 + a = x$ 的解, $\therefore x_0 \in B$, $\therefore A \subseteq B$.
- (2) 【解】** $\because A \neq \emptyset$, $\therefore x^2 - x + a = 0$ 有实根, $\therefore \Delta = 1 - 4a \geq 0$, $\therefore a \leq \frac{1}{4}$, \therefore 集合 B 为方程 $(x^2 + a)^2 + a = x$, 即 $x^4 + 2ax^2 - x + a^2 + a = 0$ 的解集, 集合 A 为方程 $x^2 - x + a = 0$ 的解集, \therefore 因式 $x^4 + 2ax^2 - x + a^2 + a$ 分解后必定含有因式 $x^2 - x + a$, $\therefore x^4 + 2ax^2 - x + a^2 +$



$$a = (x^2 - x + a)(x^2 + x + a + 1).$$

又 $\because A=B, \therefore x^2 + x + a + 1 = 0$ 无实根或其根为方程 $x^2 - x + a = 0$ 的根.

当 $x^2 + x + a + 1 = 0$ 无实根时,

$$\Delta_1 = 1 - 4(a+1) < 0, \text{解得 } a > -\frac{3}{4};$$

当 $x^2 + x + a + 1 = 0$ 的根为方程 $x^2 - x + a = 0$ 的根时,

①当 $x^2 + x + a + 1 = 0$ 有两个不等实根时, 由根与系数的关系知其根不可能与 $x^2 - x + a = 0$ 的根相同;

②当 $x^2 + x + a + 1 = 0$ 有两个相等实根, 即

$$\Delta_1 = 1 - 4(a+1) = 0, \text{即 } a = -\frac{3}{4} \text{ 时,}$$

方程的根为 $x = -\frac{1}{2}$, 此根刚好是 $x^2 - x + a = 0$ 的根, 满足条件.

综上, 实数 a 的取值范围是 $\left\{ a \mid -\frac{3}{4} \leq a \leq \frac{1}{4} \right\}$.

1.3 集合的基本运算



对点上分

1. A 【解析】依题意, $M \cup N = \{-1, 0, 1, 2\}$, 故选 A.

2. B 【解析】 $B = \{x \mid 3x - 7 \geq 8 - 2x\} = \{x \mid x \geq 3\}$, 所以 $A \cup B = \{x \mid x \geq 2\}$, 故选 B.

3. A 【解析】 $\because A = \{x \mid 1 \leq x \leq 3\}, B = \{x \mid 2 < x < 4\}, \therefore A \cap B = \{x \mid 2 < x \leq 3\}$, 故选 A.

4. B 【解析】 $\because A = \{x \in \mathbf{N}^* \mid 1 \leq x \leq 10\} = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}, B = \{y \mid y \leq 1 \text{ 或 } y \geq 8\}, \therefore A \cap B = \{1, 8, 9, 10\}$, 故选 B.

5. C 【解析】全集 $U = \{-2, -1, 0, 1, 2\}$, 集合 $B = \{-1, 0, 1\}$, 所以 $\complement_U B = \{-2, 2\}$. 故选 C.

6. D 【解析】因为 $U = \{x \mid x + 1 > 0\} = \{x \mid x > -1\}$, 集合 $A = \{x \mid 1 < x \leq 2\}$, 所以 $\complement_U A = \{x \mid -1 < x \leq 1 \text{ 或 } x > 2\}$. 故选 D.

7. D



攻略上分

本题中集合运算出现不等号, 则考虑使用大招攻略 2 的“正难则反”思想求解.

【解析】因为 $A = \{x | x \leq 0 \text{ 或 } x \geq 3\}$, $B = \{x | x \leq a-1 \text{ 或 } x \geq a+1\}$, 所以 $\complement_{\mathbf{R}} B = \{x | a-1 < x < a+1\}$,

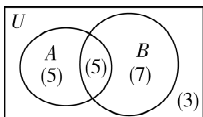
当 $A \cap (\complement_{\mathbf{R}} B) = \emptyset$ 时, 有 $\begin{cases} a-1 \geq 0, \\ a+1 \leq 3, \end{cases}$ 解得

$$1 \leq a \leq 2,$$

所以当 $A \cap (\complement_{\mathbf{R}} B) \neq \emptyset$ 时, 有 $a < 1$ 或 $a > 2$,

所以实数 a 的取值范围是 $\{a | a < 1 \text{ 或 } a > 2\}$. 故选 D.

8. C 【解析】设擅长语文的同学构成集合 A , 擅长英语的同学构成集合 B , 20 人代表队构成全集 U ,



则 $\text{card}(A) = 10$, $\text{card}(B) = 12$, $\text{card}(A \cap B) = 5$, $\text{card}(U) = 20$,

$$\therefore \text{card}(A \cup B) = \text{card}(A) + \text{card}(B) - \text{card}(A \cap B) = 10 + 12 - 5 = 17,$$

$$\therefore \text{card}(\complement_U(A \cup B)) = 20 - 17 = 3,$$

\therefore 语文和英语均不擅长的同学有 $20 - 17 = 3$ (名).

故选 C.

9. AB 【解析】因为 $S = \{x | -2 \leq x \leq 8\}$, $T = \{x | 0 < x < 4\}$,

$$\text{所以 } \complement_{\mathbf{R}} T = \{x | x \leq 0 \text{ 或 } x \geq 4\}, (\complement_{\mathbf{R}} T) \cap S = \{x | -2 \leq x \leq 0 \text{ 或 } 4 \leq x \leq 8\},$$

因为集合 $P \subseteq (\complement_{\mathbf{R}} T) \cap S$, 所以集合 P 可以是 A, B . 故选 AB.

10. 【解】(1) $M = \{x \in \mathbf{Z} | 0 \leq x < 3\} = \{0, 1, 2\}$, $N = \{x | x^2 - x - 2 = 0\} = \{-1, 2\}$, 所以 $M \cap N = \{2\}$.

(2) 因为 $M \cup N = \{-1, 0, 1, 2\}$, 所以 $\complement_U(M \cup N) = \{-4, 4\}$.

(3) 因为 $\complement_U M = \{-4, -1, 4\}$, $\complement_U N = \{-4, 0, 1, 4\}$, 所以 $(\complement_U M) \cup (\complement_U N) = \{-4, -1, 0, 1, 4\}$.



能力上分

1. C 【解析】由题图可知阴影部分所表示的集合为 $\complement_{(A \cup B)} B$, $A \cap (\complement_U B)$, 故 ② ③ 正确;

因为 $A = \{x \in \mathbf{Z} | -2 < x < 3\} = \{-1, 0, 1,$



$$2\}, \complement_U B = \{-1, 2, 4\},$$

所以 $A \cap (\complement_U B) = \{-1, 2\}$, 故①正确;

$(\complement_U A) \cap (\complement_U B) = \{4\}$, 故④错误.

所以正确的有 3 个. 故选 C.

2. D 【解析】(1) 当 $a = 3$ 时, $M = \{3\}$, $M \cap N = \emptyset$, $M \cup N = \{1, 3, 4\}$;

(2) 当 $a = 1$ 时, $M = \{1, 3\}$, $M \cap N = \{1\}$, $M \cup N = \{1, 3, 4\}$;

(3) 当 $a = 4$ 时, $M = \{3, 4\}$, $M \cap N = \{4\}$, $M \cup N = \{1, 3, 4\}$;

(4) 当 $a \neq 1, 3, 4$ 时, $M = \{3, a\}$, $M \cap N = \emptyset$, $M \cup N = \{1, 3, 4, a\}$.

综上可知 A, B, C 不正确, D 正确. 故选 D.

3. C 【解析】因为 $A \cap (\complement_{\mathbf{R}} B) = \{2\}$, 所以

$2 \in A$, 所以 $4 + 2p - 6 = 0$, 解得 $p = 1$,

当 $p = 1$ 时, 由 $x^2 + x - 6 = 0$, 解得 $x = 2$ 或 $x = -3$, 所以 $-3 \in B$,

故 $9 - 3q + 2 = 0$, 解得 $q = \frac{11}{3}$, 所以 $p + q = 1 +$

$$\frac{11}{3} = \frac{14}{3}, \text{ 故选 C.}$$

4. D 【解析】当 $a = 0$ 时, $A = \emptyset$, 此时 $A \cup B = B$, 符合题意.

当 $a \neq 0$ 时, 集合 $A = \{x \mid ax - 1 = 0\} = \left\{\frac{1}{a}\right\}$.

$\because B = \{x \in \mathbf{N}^* \mid 2 \leq x < 5\} = \{2, 3, 4\}$, 且

$A \cup B = B$, $\therefore a = \frac{1}{2}$ 或 $a = \frac{1}{3}$ 或 $a = \frac{1}{4}$.

则实数 a 的所有值构成的集合是 $\left\{0, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}\right\}$, 故选 D.

易错警示

含参数的集合运算中忽视对空集的讨论

本题中集合 A 含有参数, 要注意对集合 A 是否为空集进行讨论, 此处容易忽略集合 A 为空集的情形, 导致遗漏参数的值.

5. A 【解析】由题意可知, $\complement_{\mathbf{R}} A = \{x \mid x < -2 \text{ 或 } x > 10\}$.

因为 $B \cap (\complement_{\mathbf{R}} A) = \emptyset$, 所以 $B \subseteq A$,

因为 $B = \{x \mid 1 - m \leq x \leq 1 + m\}$, 且满足 $B \subseteq A$, $A = \{x \mid -2 \leq x \leq 10\}$,



所以当 $B = \emptyset$ 时, 满足 $B \subseteq A$,

此时 $1-m > 1+m$, 解得 $m < 0$;

$$\text{当 } B \neq \emptyset \text{ 时, 则有 } \begin{cases} m \geq 0, \\ 1-m \geq -2, \\ 1+m \leq 10, \end{cases}$$

解得 $0 \leq m \leq 3$.

综上, $m \leq 3$. 故选 A.

6. C



攻略上分

结合题意应用攻略中给出的容斥原理的应用步骤求解即可.

【解析】设参加心理社的同学构成集合 A , 参加地理社的同学构成集合 B , 参加动漫社的同学构成集合 C ,

由题知 $\text{card}(A \cup B \cup C) = 35$, $\text{card}(A \cap B \cap C) = 0$, $\text{card}(A) = 19$, $\text{card}(B) = 16$, $\text{card}(C) = 15$,

则 $\text{card}(A) + \text{card}(B) + \text{card}(C) = 19 + 16 + 15 = 50$,

→ 提示: Step1: 容

又 $\text{card}(A \cap B) = 6$, $\text{card}(B \cap C) = 5$,

→ 提示: Step2: 斥

所以 $\text{card}(A \cup B \cup C) = \text{card}(A) + \text{card}(B) + \text{card}(C) - \text{card}(A \cap B) - \text{card}(B \cap C) - \text{card}(A \cap C) + \text{card}(A \cap B \cap C)$,

→ 提示: Step3: 定量地“斥”

即 $35 = 50 - 6 - 5 - \text{card}(A \cap C)$, 得 $\text{card}(A \cap C) = 4$, 所以只参加了一个社团的同学共有 $19 - (4 + 6) + 16 - (6 + 5) + 15 - (4 + 5) = 20$ (人).

故选 C.

7. C

【解析】由定义可知满足 $(A_i \oplus A_j) \oplus A_i = A_0$ 成立的有序数对 (i, j) 应保证 $(i + j)$ 除以 3 的余数加 i 后除以 3 等于 0.

$i = 0, j = 0$, $0 + 0$ 除以 3 的余数是 0, $0 + 0$ 除以 3 的余数是 0;

$i = 0, j = 1$, $0 + 1$ 除以 3 的余数是 1, $1 + 0$ 除以 3 的余数是 1;

$i = 0, j = 2$, $0 + 2$ 除以 3 的余数是 2, $2 + 0$ 除以 3 的余数是 2;

$i = 1, j = 0$, $1 + 0$ 除以 3 的余数是 1, $1 + 1$ 除以 3 的余数是 2;



$i=1, j=1, 1+1$ 除以 3 的余数是 2, $2+1$ 除以 3 的余数是 0;

$i=1, j=2, 1+2$ 除以 3 的余数是 0, $0+1$ 除以 3 的余数是 1;

$i=2, j=0, 2+0$ 除以 3 的余数是 2, $2+2$ 除以 3 的余数是 1;

$i=2, j=1, 2+1$ 除以 3 的余数是 0, $0+2$ 除以 3 的余数是 2;

$i=2, j=2, 2+2$ 除以 3 的余数是 1, $1+2$ 除以 3 的余数是 0.

所以满足条件的数对有 $(0, 0), (1, 1), (2, 2)$, 共 3 对, 故选 C.

8. 【解】(1) $\because A \cap B = B, \therefore B \subseteq A$.

当 $m-1 > 2m+1$, 即 $m < -2$ 时, $B = \emptyset$, 满足 $B \subseteq A$;

当 $m-1 \leq 2m+1$, 即 $m \geq -2$ 时, 要使 $B \subseteq A$

成立, 需 $\begin{cases} m-1 \geq -2, \\ 2m+1 \leq 5, \end{cases}$ 可得 $-1 \leq m \leq 2$.

综上, $m < -2$ 或 $-1 \leq m \leq 2$ 时有 $A \cap B = B$, 即实数 m 的取值范围为 $\{m \mid m < -2 \text{ 或 } -1 \leq m \leq 2\}$.

(2) $\because x \in \mathbf{R}$, 且 $A = \{x \mid -2 \leq x \leq 5\}$, $B = \{x \mid m-1 \leq x \leq 2m+1\}$,

且没有元素 x 使 $x \in A$ 与 $x \in B$ 同时成立, $\therefore A$ 与 B 的交集为空集.

\therefore ①若 $B = \emptyset$, 则 $m-1 > 2m+1$, 即 $m < -2$ 时, 满足条件;

②若 $B \neq \emptyset$, 则要满足的条件是

$$\begin{cases} m-1 \leq 2m+1, \\ m-1 > 5 \end{cases} \quad \text{或} \quad \begin{cases} m-1 \leq 2m+1, \\ 2m+1 < -2, \end{cases}$$

解得 $m > 6$ 或 $-2 \leq m < -\frac{3}{2}$.

综上, 实数 m 的取值范围为 $\left\{ m \mid m < -\frac{3}{2} \text{ 或 } m > 6 \right\}$.

9. 【解】(1) 由题意知, $\complement_{\mathbf{R}} A = \{x \mid -3 \leq x \leq 7\}$,

因为 $(\complement_{\mathbf{R}} A) \cup B = \complement_{\mathbf{R}} A$, 所以 $B \subseteq (\complement_{\mathbf{R}} A)$.

①当 $B = \emptyset$, 即 $m+1 > 2m-1$ 时, 满足 $B \subseteq (\complement_{\mathbf{R}} A)$, 此时 $m < 2$;

②当 $B \neq \emptyset$ 时, 若 $B \subseteq (\complement_{\mathbf{R}} A)$,

$$\text{则} \begin{cases} m+1 \leq 2m-1, \\ m+1 \geq -3, \\ 2m-1 \leq 7, \end{cases} \quad \text{解得 } 2 \leq m \leq 4.$$



综上所述,实数 m 的取值范围为 $\{m|m \leq 4\}$.

(2) 因为 $(\complement_{\mathbf{R}}A) \cap B = \{x|a \leq x \leq b\}$, 且 $b-a \geq 1$, 所以 $B \neq \emptyset$, 即 $m+1 \leq 2m-1$, 解得 $m \geq 2$, 则 $m+1 \geq 3, 2m-1 \geq 3$.

① 当 $2m-1 \leq 7$, 即 $m \leq 4$ 时, $(\complement_{\mathbf{R}}A) \cap B = B = \{x|m+1 \leq x \leq 2m-1\}$,

故 $2m-1-(m+1) \geq 1$, 解得 $3 \leq m \leq 4$;

② 当 $\begin{cases} 2m-1 > 7, \\ m+1 \leq 7, \end{cases}$ 即 $4 < m \leq 6$ 时, $(\complement_{\mathbf{R}}A) \cap$

$B = \{x|m+1 \leq x \leq 7\}$,

故 $7-(m+1) \geq 1$, 解得 $4 < m \leq 5$;

③ 当 $m+1 > 7$, 即 $m > 6$ 时, $(\complement_{\mathbf{R}}A) \cap B = \emptyset$, 不符合题意.

综上所述,实数 m 的取值范围为 $\{m|3 \leq m \leq 5\}$.

1.1~1.3 节测上分

1. B 【解析】当 $y=2$ 时, x 分别取 2, 4, 8,

$\frac{x}{y}$ 分别为 1, 2, 4;

当 $y=4$ 时, x 分别取 2, 4, 8, $\frac{x}{y}$ 分别为 $\frac{1}{2}, 1, 2$;

当 $y=8$ 时, x 分别取 2, 4, 8, $\frac{x}{y}$ 分别为 $\frac{1}{4}, \frac{1}{2}, 1$.

故 $B = \left\{ \frac{1}{4}, \frac{1}{2}, 1, 2, 4 \right\}$, 所有元素的和为

$\frac{31}{4}$. 故选 B.

2. D 【解析】因为 $\{1, 2\} \subseteq A \subseteq \{1, 2, 3, 4, 5\}$, $\{1, 2\}$ 中含有 2 个元素, $\{1, 2, 3, 4, 5\}$ 中含有 5 个元素, 故满足条件的集合 A 的个数为 $2^{5-2} = 8$. 故选 D.

3. B 【解析】因为集合 P 有 7 个真子集, 所以集合 P 中包含 3 个元素, 所以 $-1 \leq m-1 < 0$, 解得 $0 \leq m < 1$. 故选 B.

4. A 【解析】由题图可知阴影部分表示的集合为 $(\complement_U A) \cap B$, 而 $\complement_U A = \{x|x \leq 2 \text{ 或 } x \geq 6\}$, 故 $(\complement_U A) \cap B = \{x|1 < x \leq 2\}$, 故选 A.

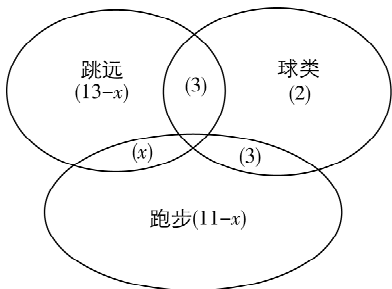
5. C 【解析】因为 $B = \{x|1 \leq x < 2\}$, 所以 $\complement_{\mathbf{R}} B = \{x|x < 1 \text{ 或 } x \geq 2\}$, 由 $A = \{x|x < a\}$, $A \cup (\complement_{\mathbf{R}} B) = \mathbf{R}$, 可得 $a \geq 2$. 故选 C.



- 6. CD** 【解析】令 $U = \{1, 2, 3, 4\}$, $A = \{2, 3, 4\}$, $B = \{1, 2\}$, 满足 $(\complement_U A) \cup B = B$, 但 $A \cap B \neq \emptyset$, $A \cap B \neq B$, $\therefore A, B$ 均不正确;
由 $(\complement_U A) \cup B = B$, 知 $\complement_U A \subseteq B$, $\therefore U = (A \cup (\complement_U A)) \subseteq (A \cup B)$, $\therefore A \cup B = U$, 故 C 正确;
由 $\complement_U A \subseteq B$, 知 $\complement_U B \subseteq A$, $\therefore (\complement_U B) \cup A = A$, 故 D 正确. 故选 CD.

- 7. D** 【解析】由 $(x^2 + ax)(x^2 + ax + 2) = 0$ 可得 $x^2 + ax = 0$ 或 $x^2 + ax + 2 = 0$,
因为 $A = \{1, 2\}$, $A \otimes B = 1$,
所以集合 B 中的元素个数为 1 或 3.
当集合 B 中的元素个数为 1 时, $x^2 + ax = 0$ 有两个相等的实数根, 且 $x^2 + ax + 2 = 0$ 无实根, 所以 $\begin{cases} a^2 = 0, \\ a^2 - 8 < 0, \end{cases}$ 解得 $a = 0$;
当集合 B 中的元素个数为 3 时, $x^2 + ax = 0$ 有两个不相等的实数根, 且 $x^2 + ax + 2 = 0$ 有两个相等的实数根, 且异于方程 $x^2 + ax = 0$ 的根, 所以 $\begin{cases} a \neq 0, \\ \Delta = a^2 - 8 = 0, \end{cases}$ 解得 $a = 2\sqrt{2}$ 或 $a = -2\sqrt{2}$.
综上所述, $a = 0$ 或 $a = 2\sqrt{2}$ 或 $a = -2\sqrt{2}$. 故选 D.

- 8. ACD** 【解析】设同时参加跳远和跑步比赛的有 x 人, 由题意画出 Venn 图, 如图所示,



- 则 $13 - x + 3 + 2 + x + 3 + 11 - x = 28$, 解得 $x = 4$,
故 A 正确;
仅参加跳远比赛的人数为 $13 - 4 = 9$, 故 B 错误;
仅参加跑步比赛的人数为 $11 - 4 = 7$, 故 C 正确;
同时参加两项比赛的人数为 $3 + 3 + 4 =$



10,故 D 正确.

故选 ACD.

- 9. D 【解析】**①: 如果 $a_1 \in M, a_2 \in M$, 不妨设 $a_1 = x_1^2 - y_1^2, a_2 = x_2^2 - y_2^2$, 那么 $a_1 a_2 = (x_1^2 - y_1^2)(x_2^2 - y_2^2) = (x_1 x_2 + y_1 y_2)^2 - (x_1 y_2 + x_2 y_1)^2 \in M$, ①正确;
- ②: $B = \{b \mid b = 2n + 1, n \in \mathbf{N}\}$, 由 $b = 2n + 1 = (n + 1)^2 - n^2, n + 1 \in \mathbf{Z}, n \in \mathbf{Z}$, 得 $B \subseteq M$, ②正确;
- ③: 因为 $x^2 - y^2 = (x + y)(x - y)$, 所以当 $x + y, x - y$ 至少有一个为 0 时, $x^2 - y^2 = 0$, 当 $x + y, x - y$ 均为非零整数时, 若 x, y 均为奇数, 则 $x + y, x - y$ 均为偶数, $x^2 - y^2 = (x + y)(x - y)$ 为 4 的倍数, 若 x, y 一个为奇数, 一个为偶数, 则 $x + y, x - y$ 均为奇数, $x^2 - y^2 = (x + y)(x - y)$ 为奇数, 若 x, y 均为偶数, 则 $x + y, x - y$ 均为偶数, $x^2 - y^2 = (x + y)(x - y)$ 为 4 的倍数, 又 $2n + 1 = (n + 1)^2 - n^2, 4m = (m + 1)^2 - (m - 1)^2, n, m \in \mathbf{Z}$, 所以 $M = \{a \mid a = x^2 - y^2, x \in \mathbf{Z}, y \in \mathbf{Z}\} = \{d \mid d = 2n + 1, n \in \mathbf{Z}\} \cup \{d \mid d = 4n, n \in \mathbf{Z}\}$, 所以 $C \cap M = \{x \mid x = 4m, m \in \mathbf{Z}\}$, ③正确. 故选 D.

- 10. 【解】**(1) \because 集合 B 的真子集有且只有 1 个, \therefore 集合 B 中元素的个数为 1.

$$\Delta = 4(a + 1)^2 - 4(a^2 - 5) = 0, \text{ 即 } 8(a + 3) = 0, \text{ 解得 } a = -3.$$

\therefore 实数 a 的值为 -3.

$$(2) \because A \cup B = A, \therefore B \subseteq A = \{2, 1\}.$$

对集合 B 可能的情况进行分类讨论:

当 $\Delta < 0$, 即 $a < -3$ 时, $B = \emptyset$, 满足条件;

当 $\Delta = 0$, 即 $a = -3$ 时, $B = \{2\}$, 满足条件;

当 $\Delta > 0$ 时, 要满足条件, 必有 $B = \{1, 2\}$, 由根与系数的关系有

$$\begin{cases} 1 + 2 = -2(a + 1), \\ 1 \times 2 = a^2 - 5, \end{cases} \quad \text{此方程组无解, 不满足条件, 舍去.}$$

综上所述, 实数 a 的取值范围是 $\{a \mid a \leq -3\}$.

综上所述, 实数 a 的取值范围是 $\{a \mid a \leq -3\}$.



专题上分 1

集合中的参数

与新定义问题

1. C



攻略上分

本题为已知集合的运算结果求解参数,将集合间的运算结果转化为集合间的关系,再进行分析即可得出答案.

【解析】由 $A \cap B = B$, 得 $B \subseteq A$,

提示: Step1: 转化

由子集的性质可知 $a^2 \in \{-2, 1, 4\}$.

对于任意的实数 a , $a^2 \geq 0$, a^2 不可能等于 -2 , 由集合元素的互异性, $a^2 = 1$ 不成立, 故只能是 $a^2 = 4$,

提示: Step2: 对满足的条件进行分析

解得 $a = \pm 2$. 故选 C.

提示: Step3: 得出结果

2. C 【解析】当 $m = 0$ 时, $B = \emptyset$, 令 $x^2 + x - 6 = 0$, 解得 $x = 2$ 或 $x = -3$, 所以 $A = \{2, -3\}$, 则 A 不是空集, 而空集是任何非空集合的真子集, 故 $m = 0$ 符合题意.

当 $m \neq 0$ 时, 令 $mx + 1 = 0$, 解得 $x = -\frac{1}{m}$,

所以 $B = \left\{-\frac{1}{m}\right\}$,

令 $-\frac{1}{m} = 2$, 解得 $m = -\frac{1}{2}$,

令 $-\frac{1}{m} = -3$, 解得 $m = \frac{1}{3}$,

故 m 的取值范围为 $\left\{0, -\frac{1}{2}, \frac{1}{3}\right\}$.

故选 C.

3. C 【解析】若 $A = \emptyset$, $B = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, 则 $\text{card}(A) = 0$, $\text{card}(B) = 6 \in B$, 与 $\text{card}(B) \notin B$ 矛盾, 不满足题意, 故 $A \neq \emptyset$. 同理, $B \neq \emptyset$, $\text{card}(A) \neq 6$.

设 A 中元素的个数为 $\text{card}(A) = k$ ($k = 1, 2, \dots, 5$), 则 B 中元素的个数为 $\text{card}(B) = 6 - k$, 且 $6 - k \in (A \cup B)$, 由 $k \notin A$ 且 $6 - k \notin B$, 得 $k \in B$, $6 - k \in A$.

①当 $k = 1$ 时, $5 \in A$, 又 $\text{card}(A) = 1$, 所以 $A = \{5\}$, $B = \{1, 2, 3, 4, 6\}$, 满足题意;



②当 $k=2$ 时, $2 \notin A, 4 \notin B$, 则 $2 \in B, 4 \in A$,
又 $\text{card}(A)=2$,

若 $A=\{1,4\}$, 则 $B=\{2,3,5,6\}$,

若 $A=\{3,4\}$, 则 $B=\{1,2,5,6\}$,

若 $A=\{4,5\}$, 则 $B=\{1,2,3,6\}$,

若 $A=\{4,6\}$, 则 $B=\{1,2,3,5\}$, 以上情况都满足题意;

③当 $k=3$, 即 $\text{card}(A)=3$ 时, $3 \notin A, 3 \in B$, 但此时 $\text{card}(B)=6-3=3 \notin B$, 矛盾, 故不满足题意;

④当 $k=4$ 时, 由 $\text{card}(B)=6-4=2 \notin B$ 且 $\text{card}(A)=4 \notin A$, 得 $2 \in A, 4 \in B$, 又 $\text{card}(B)=2$, 与②同理可得不同集合 B 的个数为 4, 所以不同集合 A 的个数为 4;

⑤当 $k=5$ 时, 由 $\text{card}(A)=5 \notin A$, 得 $5 \in B$, 又 $\text{card}(B)=1$, 所以 $B=\{5\}, A=\{1, 2, 3, 4, 6\}$, 满足题意.

综上, 满足条件的所有不同集合 A 的个数为 $1+4+4+1=10$. 故选 C.

4. -4



攻略上分

本题根据元素与集合间的关系求解参数的取值, 列举所有可能的情况, 求参数值, 注意代回集合中检验互异性.

【解析】若 $4 \in \{a, a^2-12\}$, 则有 $a=4$ 或 $a^2-12=4$, 解得 $a=4$ 或 $a=-4$, 当 $a=4$ 时, $a=a^2-12$, 不满足集合中元素的互异性, 故 $a=-4$.

提示: 一定要代回检验互异性

5. 2 【解析】由题意可得 $a \neq 0$, 则 $\frac{b-1}{a}=0$,

即 $b=1$, 则 $a=\frac{1}{a}$, 解得 $a=1$ 或 $a=-1$.

若 $a=1$, 则违背集合中元素的互异性, 故舍去;

若 $a=-1$, 则有 $\{1, -1, 0\} = \{0, -1, 1\}$, 符合题意.

综上所述, $a=-1$, 则 $b-a=1-(-1)=2$.

6. A 【解析】集合 $A=\{-1, 2\}, B=\{x \mid ax^2=2, a \geq 0\}$.

若 $a=0$, 则 $B=\emptyset$, 即有 $B \subseteq A$;

若 $a>0$, 则 $B=\left\{-\sqrt{\frac{2}{a}}, \sqrt{\frac{2}{a}}\right\}$, 不满足

$$B \subseteq A;$$

若 A, B 两个集合有公共元素且互不为对方的子集, 则 $\sqrt{\frac{2}{a}} = 2$ 或 $-\sqrt{\frac{2}{a}} = -1$, 解

$$\text{得 } a = \frac{1}{2} \text{ 或 } a = 2.$$

综上所述, $a = 0$ 或 $\frac{1}{2}$ 或 2 . 故选 A.

7. ABD 【解析】对于选项 A: 当集合 $M = \{-4, -2, 0, 2, 4\}$ 时, $2+4 \notin M$, 集合 M 不为闭集合, 故 A 错误;

对于选项 B: 设 a, b 是任意的两个正整数, 当 $a < b$ 时, $a-b < 0$ 不是正整数, 故 B 错误;

对于选项 C: 当 $M = \{n \mid n = 3k, k \in \mathbf{Z}\}$ 时, 设 $a = 3k_1, b = 3k_2, k_1, k_2 \in \mathbf{Z}$, 则 $a+b = 3k_1+3k_2 = 3(k_1+k_2) \in M, a-b = 3k_1-3k_2 = 3(k_1-k_2) \in M$, 故 C 正确;

对于选项 D: 设 $A_1 = \{n \mid n = 3k, k \in \mathbf{Z}\}, A_2 = \{n \mid n = 2k, k \in \mathbf{Z}\}$ 是闭集合, 且 $3 \in A_1, 2 \in A_2$, 而 $2+3 \notin (A_1 \cup A_2)$, 此时 $A_1 \cup A_2$ 不为闭集合, 故 D 错误. 故选 ABD.

8. 【解】(1) 因为对任意的 $a, b \in \mathbf{R}$, 有 $a \oplus b = ab, a \otimes b = a^b + 1$,

全集 $U = \{x \mid x = a \oplus b + a \otimes b, 0 < a \leq b < 3 \text{ 且 } a \in \mathbf{Z}, b \in \mathbf{Z}\}$,

所以 $U = \{x \mid x = ab + a^b + 1, 0 < a \leq b < 3, a, b \in \mathbf{Z}\}$.

因为 $0 < a \leq b < 3, a, b \in \mathbf{Z}$, 所以 $a = 1, b = 1$, 或 $a = 1, b = 2$, 或 $a = 2, b = 2$.

当 $a = 1, b = 1$ 时, $ab + a^b + 1 = 1 + 1 + 1 = 3$;

当 $a = 1, b = 2$ 时, $ab + a^b + 1 = 2 + 1 + 1 = 4$;

当 $a = 2, b = 2$ 时, $ab + a^b + 1 = 4 + 4 + 1 = 9$.

所以 $U = \{3, 4, 9\}$.

$$(2) 4(a \oplus b) + \frac{a \otimes b}{b} = 4ab + \frac{a^b + 1}{b},$$

因为 $0 < a < b < 3$ 且 $a \in \mathbf{Z}, b \in \mathbf{Z}$, 所以 $a = 1, b = 2$,

$$\text{所以 } 4(a \oplus b) + \frac{a \otimes b}{b} = 4ab + \frac{a^b + 1}{b} = 4 \times 1 \times 2 + \frac{1^2 + 1}{2} = 9, \text{ 所以 } A = \{9\}.$$

(3) 因为 $U = \{3, 4, 9\}, A = \{9\}$, 所以 $\complement_U A = \{3, 4\}$.

假设集合 A, B 能满足 $(\complement_U A) \cap B = \emptyset$,

则 $B = \emptyset$, 或 $3 \notin B$ 且 $4 \notin B$.

又 $B = \{x | x^2 - 3x + m = 0\}$,

当 $B = \emptyset$ 时, $\Delta = (-3)^2 - 4m < 0$, 解得 $m > \frac{9}{4}$;

当 $3 \in B$ 时, $3^2 - 3 \times 3 + m = 0$, 解得 $m = 0$;

当 $4 \in B$ 时, $4^2 - 3 \times 4 + m = 0$, 解得 $m = -4$.

所以若 $3 \notin B$ 且 $4 \notin B$, 则 $m \neq 0$ 且 $m \neq -4$.

综上所述, 实数 m 的取值范围

为 $\left\{m \mid m > \frac{9}{4}\right\}$.

所以集合 A, B 能满足 $(\complement_U A) \cap B = \emptyset$, 实

数 m 的取值范围为 $\left\{m \mid m > \frac{9}{4}\right\}$.

1.4 充分条件与必要条件

1.4.1 充分条件与必要条件+

1.4.2 充要条件



1. B 【解析】因为 a, b 为实数, 所以由 $a > |b|$ 得 $a > b$, 故由 $p: a > |b|$ 能推出 $q: a > b$; 反之, 当 $a = 1, b = -2$ 时, 满足 $a > b$, 但是 $a = 1 < |-2| = 2$, 所以 p 是 q 的充分不必要条件. 故选 B.

2. B 【解析】由题意可知, “做容易事”不能推出“做难为之事”, 但“做难为之事”一定可以推出“做容易事”, 故“做容易事”是“做难为之事”的必要不充分条件, 故选 B.

3. C 【解析】充分性: $4m + 6n = 2(2m + 3n)$, 当 $n = 0, m \in \mathbf{Z}$ 时, $2m + 3n = 2m$ 为偶数; 当 $m = 1, n \in \mathbf{Z}$ 时, $2m + 3n = 2 + 3n$; 当 $m = 0, n \in \mathbf{Z}$ 时, $2m + 3n = 3n$; 当 $m = -1, n \in \mathbf{Z}$ 时, $2m + 3n = 3n - 2$, 则 $2m + 3n$ 可表示所有整数, 即 $4m + 6n$ 可表示所有偶数.

因为 $2k \in A$, 则 $2k \in B$, 所以“ $x \in A$ ”是“ $x \in B$ ”的充分条件.

必要性: 因为 $4m + 6n = 2(2m + 3n), m, n \in \mathbf{Z}$, 所以“ $x \in B$ ”是“ $x \in A$ ”的充分条件, 即“ $x \in A$ ”是“ $x \in B$ ”的必要条件. 所以“ $x \in A$ ”是“ $x \in B$ ”的充要条件. 故选 C.

4. A 【解析】由题意知, “太空握手” \Rightarrow “空

空间站组合体与梦天实验舱处于同一轨道高度”，“空间站组合体与梦天实验舱处于同一轨道高度” \nRightarrow “太空握手”，

\therefore “梦天实验舱与天和核心舱成功实现‘太空握手’”是“空间站组合体与梦天实验舱处于同一轨道高度”的充分不必要条件. 故选 A.

5. AD 【解析】对于 A, 灯泡 L 亮, 可能是 S_1 闭合, 不一定是 S 闭合, 当 S 闭合时, 必有灯泡 L 亮, 故 p 是 q 的必要不充分条件, A 正确;

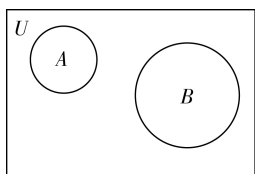
对于 B, 由于 S 和 L 是串联关系, 故灯泡 L 亮, 必有 S 闭合, S 闭合, 灯泡 L 亮, 即 p 是 q 的充要条件, B 错误;

对于 C, 灯泡 L 亮, 则开关 S_1 和 S 必都闭合, 当开关 S 闭合 S_1 打开时, 灯泡 L 不亮, 故 p 是 q 的充分不必要条件, C 错误;

对于 D, 灯泡 L 亮, 开关 S 未必闭合, 当开关 S 闭合时, 灯泡 L 亮, 故 p 是 q 的必要不充分条件, D 正确.

故选 AD.

6. A 【解析】由 $A \subseteq \complement_U B$, 得 A, B 关系如图, 由图可知 $B \subseteq \complement_U A$ 正确. 故选 A.



7. C 【解析】 $\because |x| \leq 1, \therefore -1 \leq x \leq 1$,

A 选项是充要条件, A 错误;

B 选项是充分不必要条件, B 错误;

C 选项是必要不充分条件, C 正确;

D 选项是充分不必要条件, D 错误.

8. C 【解析】由方程 $x^2 + 2x + a = 0$ 有两个不等实数根可得 $\Delta = 4 - 4a > 0$, 解得 $a < 1$, 观察选项可得“方程 $x^2 + 2x + a = 0$ 有两个不等实数根”的一个充分不必要条件是 $a < 0$, 故选 C.

9. (1) ④ (2) ① 【解析】由题意知,

① $ab = 0 \Leftrightarrow a = 0$ 或 $b = 0$, 即 a, b 至少有一个为 0;

② $a + b = 0 \Leftrightarrow a, b$ 互为相反数, 则 a, b 可能均为 0, 也可能为一正数一负数;

③ $a(a^2 + b^2) = 0 \Leftrightarrow a = 0, b$ 为任意实数;



$$\textcircled{4} ab > 0 \Leftrightarrow \begin{cases} a > 0, \\ b > 0, \end{cases} \text{或} \begin{cases} a < 0, \\ b < 0. \end{cases}$$

综上所述, (1) 使 a, b 都不为 0 的充分条件是 $\textcircled{4}$; (2) 使 a, b 至少有一个为 0 的充要条件是 $\textcircled{1}$.

10. B 【解析】选项 A, 菱形的对角线互相垂直平分, 但是当菱形的邻角不相等时, 此时四边形不是正方形, 所以 p 不是 q 的充要条件, 因此本选项不符合题意;

选项 B, 当两个三角形相似时, 这两个三角形三边成比例, 当两个三角形三边成比例时, 这两个三角形相似, 所以 p 是 q 的充要条件, 因此本选项符合题意;

选项 C, 当 $A = \{1\}, B = \{2\}$ 时, 显然 $A \cap B$ 为空集, 但是 A 与 B 都不为空集, 所以 p 不是 q 的充要条件, 因此本选项不符合题意;

选项 D, 因为等边三角形是特殊的等腰三角形, 所以 p 不是 q 的充要条件, 因此本选项不符合题意. 故选 B.

11. 【证明】 $\textcircled{1}$ 充分性: 即证明 $a - b + c = 0 \Rightarrow$ 方程 $ax^2 + bx + c = 0$ 有一个根为 -1 ,

由 $a - b + c = 0$, 得 $b = a + c$,

代入方程得 $ax^2 + (a + c)x + c = 0$, 得 $(ax + c)(x + 1) = 0$,

所以 $x = -1$ 是方程 $ax^2 + bx + c = 0$ 的一个根.

$\textcircled{2}$ 必要性: 即证明 $x = -1$ 是方程 $ax^2 + bx + c = 0$ 的根 $\Rightarrow a - b + c = 0$,

将 $x = -1$ 代入方程 $ax^2 + bx + c = 0$, 即有 $a - b + c = 0$.

由 $\textcircled{1}\textcircled{2}$ 可知, 关于 x 的方程 $ax^2 + bx + c = 0$ 有一个根为 -1 的充要条件是 $a - b + c = 0$.

12. C 【解析】因为此数字为小于 5 的正整数, 所以 $A = \{x \mid 0 < \Delta x < 2\} =$

$$\left\{x \mid 0 < x < \frac{2}{\Delta}\right\},$$

因为 B 是 A 成立的必要不充分条件, C 是 A 成立的充分不必要条件, 所以 C 是

A 的真子集, A 是 B 的真子集, 故 $\frac{2}{\Delta} > \frac{2}{3}$



且 $\frac{2}{\Delta} \leq 5$, 解得 $\frac{2}{5} \leq \Delta < 3$, 故“ Δ ”中的数字可以是 1 或 2. 故选 C.

- 13. B** 【解析】若 $M \subseteq N$, 则 $a^2 = 1$ 或 $a^2 = 2$, 可得 $a = \pm 1$ 或 $a = \pm\sqrt{2}$, 故由 $M \subseteq N$ 不一定推出 $a = 1$, 反之, 若 $a = 1$, 则 $M = \{-1, 1\}$, 满足 $M \subseteq N$, 故“ $M \subseteq N$ ”是“ $a = 1$ ”的必要不充分条件. 故选 B.

- 14. (1) $\frac{1}{2}$ (2) ①②⑤** 【解析】(1) 若 A

是 B 的充要条件, 则 $A = B$.

当 $b = 0$ 时, $B = \emptyset$, 不符合题意, 故 $b \neq 0$;

当 $b > 0$ 时, $B = \left\{ x \mid x > \frac{1}{b} \right\}$, 此时若 $A = B$, 则 $\frac{1}{b} = 2$, 解得 $b = \frac{1}{2}$, 符合题意;

当 $b < 0$ 时, $B = \left\{ x \mid x < \frac{1}{b} \right\}$, 此时 $A \neq B$, 不符合题意. 综上, $b = \frac{1}{2}$.

(2) 若 A 是 B 的充分不必要条件, 则 A 是 B 的真子集,

故由(1)得, 当 $b \leq 0$ 时, 不符合题意, 当

$b > 0$ 时, $B = \left\{ x \mid x > \frac{1}{b} \right\}$, 此时 A 是 B 的真子集, 得到 $\frac{1}{b} < 2$, 解得 $b > \frac{1}{2}$, 故满足条件的是①②⑤.

- 15. 【解】**(1) 因为 $x \in P$ 是 $x \in S$ 的必要条件, 且集合 S 为非空集合,

$$\text{所以} \begin{cases} -2 \leq 1-m, \\ 1+m \leq 10, \\ 1-m \leq 1+m, \end{cases} \quad \text{解得 } 0 \leq m \leq 3,$$

所以实数 m 的取值范围是 $\{m \mid 0 \leq m \leq 3\}$.

(2) 若 $x \in P$ 是 $x \in S$ 的充要条件, 则

$$P = S, \text{ 所以 } \begin{cases} 1-m = -2, \\ 1+m = 10, \end{cases} \text{ 所以 } \begin{cases} m = 3, \\ m = 9, \end{cases} \text{ 这样的 } m \text{ 不存在.}$$

1.4 节测上分

- 1. A** 【解析】当 $a > 9$ 时, 必有 $\frac{1}{a} < \frac{1}{9}$;

当 $\frac{1}{a} < \frac{1}{9}$ 时, 不妨取 $a = -1$, 满足 $\frac{1}{a} < \frac{1}{9}$,

但推不出 $a > 9$.

故“ $a > 9$ ”是“ $\frac{1}{a} < \frac{1}{9}$ ”的充分不必要条件. 故选 A.

2. B 【解析】因为 $xy + 1 \neq x + y$, 即 $xy + 1 - x - y \neq 0$, 所以 $(x-1)(y-1) \neq 0$, 即 $x \neq 1$ 且 $y \neq 1$, 故“ $xy + 1 \neq x + y$ ”的充要条件是“ x, y 都不为 1”, 故选 B.

3. D 【解析】对于 A: 若 $x = -4$, 则 $x < 3$, 但 $x^2 < 9$ 不成立, 所以“ $x < 3$ ”不是“ $x^2 < 9$ ”的充分条件, 故 A 错误;

对于 B: $(x-1)^2 + (y-2)^2 = 0 \Rightarrow \begin{cases} x=1, \\ y=2, \end{cases} (x-1)(y-2) = 0 \Rightarrow x=1 \text{ 或 } y=2$, 所以“ $(x-1)(y-2) = 0$ ”与“ $(x-1)^2 + (y-2)^2 = 0$ ”不等价, 故 B 错误;

对于 C: 当 $x < 0$ 时, $\frac{1}{x} < \frac{1}{2}$, 故“ $x > 2$ ”不是“ $\frac{1}{x} < \frac{1}{2}$ ”的充要条件, 故 C 错误;

对于 D: $a - 2b = 0 \Rightarrow a = b = 0$ 或 $\frac{a}{b} = 2$, 而 $\frac{a}{b} = 2 \Rightarrow a - 2b = 0$, 所以“ $a - 2b = 0$ ”是“ $\frac{a}{b} = 2$ ”的必要不充分条件, 故 D 正确.
故选 D.

4. B 【解析】若不等式 $1 < x < 3$ 的必要不充分条件是 $m - 2 < x < m + 2$, 则 $\begin{cases} m+2 \geq 3, \\ m-2 \leq 1, \end{cases}$ 解得 $1 \leq m \leq 3$, 经检验符合题意. 故选 B.

5. A 【解析】 $\because \alpha$ 是 β 的必要不充分条件, $\therefore \beta \Rightarrow \alpha$, α 无法推出 β .

又 $\because \gamma$ 是 β 的充要条件, $\therefore \gamma \Leftrightarrow \beta$, $\therefore \gamma \Rightarrow \alpha$, α 无法推出 γ .

由充分条件和必要条件的定义可知, γ 是 α 的充分不必要条件. 故选 A.

6. D 【解析】取 $x_1 = -\frac{1}{2} > -1$, $x_2 = 4 > 1$,

则 $x_1 + x_2 = \frac{7}{2} > 0$, $x_1 x_2 = -2 < -1$,

所以由 $x_1 > -1$ 且 $x_2 > 1$ 不能推出 $x_1 + x_2 > 0$ 且 $x_1 x_2 > -1$,

取 $x_1 = 1$, $x_2 = \frac{1}{2}$, 满足 $x_1 + x_2 = \frac{3}{2} > 0$

且 $x_1 x_2 = \frac{1}{2} > -1$, 但 $x_2 < 1$,

所以由 $x_1 + x_2 > 0$ 且 $x_1 x_2 > -1$ 不能推出 $x_1 > -1$ 且 $x_2 > 1$,

所以“ $x_1 > -1$ 且 $x_2 > 1$ ”是“ $x_1 + x_2 > 0$ 且 $x_1 x_2 > -1$ ”的既不充分也不必要条件. 故选 D.

7. B 【解析】把 $x=2$ 代入 $m^2 x^2 - (m+3)x + 4 = 0$, 得 $4m^2 - 2m - 2 = 0$, 解得 $m = -\frac{1}{2}$ 或 $m = 1$.

当 $m = 1$ 时, $m^2 x^2 - (m+3)x + 4 = 0$ 可化为 $x^2 - 4x + 4 = 0$, 解得 $x = 2$, 此时“ $x = 2$ ”是“ $m^2 x^2 - (m+3)x + 4 = 0$ ”的充要条件, 应舍去;

当 $m = -\frac{1}{2}$ 时, $m^2 x^2 - (m+3)x + 4 = 0$ 可化为 $x^2 - 10x + 16 = 0$, 解得 $x = 2$ 或 $x = 8$, 此时“ $x = 2$ ”是“ $m^2 x^2 - (m+3)x + 4 = 0$ ”的充分不必要条件, 故 $m = -\frac{1}{2}$. 故选 B.

8. 【解】(1) 当 $a = 2$ 时, $B = \{x \mid |x| < 2\} = \{x \mid -2 < x < 2\}$, 所以 $A \cup B = \{x \mid -2 < x < 3\}$, 由 $\complement_{\mathbb{R}} B = \{x \mid x \leq -2 \text{ 或 } x \geq 2\}$, 可得 $A \cap \complement_{\mathbb{R}} B = \{x \mid 2 \leq x < 3\}$.

(2) 若“ $x \in A$ ”是“ $x \in B$ ”的充分不必要条件, 则 $A \subsetneq B$, 可知 $B \neq \emptyset$, 故 $a > 0$.

$A = \{x \mid -1 < x < 3\}$, 且 $B = \{x \mid |x| < a\} = \{x \mid -a < x < a\}$,

由 $A \subsetneq B$ 可得, $-1 \geq -a$ 且 $3 \leq a$ 两式等号不同时成立, 故 $a \geq 3$, 即实数 a 的取值范围是 $\{a \mid a \geq 3\}$.

1.5 全称量词与存在量词

1.5.1 全称量词与存在量词+

1.5.2 全称量词命题和存在量词命题的否定



1. C 【解析】对于 A, 命题含有存在量词, 此命题为存在量词命题, 不符合题意; 对于 B, 命题含有存在量词, 此命题为存在量词命题, 不符合题意; 对于 C, 命题为所有偶数的平方是偶数, 此命题为全称量词命题, 符合题意; 对于 D, 命题含有存在量词, 此命题为存在量词命题, 不符合题意. 故选 C.



2.2 【解析】①是全称量词命题；

④是全称量词命题；

②和③含有存在量词，是存在量词命题.

3. (答案不唯一) $\forall k \in \mathbf{N}^*, 1+3+5+\cdots+(2k-1)=k^2$ 【解析】观察式子可知，从 1 开始从小到大连续 k 个奇数相加的和为 k^2 ，故可得 $\forall k \in \mathbf{N}^*, 1+3+5+\cdots+(2k-1)=k^2$.

4. BD 【解析】对于 A，因为 $a^2=3a-2$ ，所以 $(a-2)(a-1)=0$ ， $a=2$ 或 $a=1$ ，所以 $a<3$ ，故 A 错误；

对于 B，当 $x=0$ 时， $2^x=1>0$ ，故 B 正确；

对于 C，若 $x=\sqrt{3}+1$ ，则 $x^2=4+2\sqrt{3} \notin \mathbf{Q}$ ，故 C 错误；

对于 D， $\forall x \in \mathbf{N}^*$ ，则 $\frac{3x+2}{x+1}=3-\frac{1}{x+1} \notin \mathbf{N}$ ，满足条件，故 D 正确. 故选 BD.

5. AC 【解析】对于 A，是全称量词命题且为真命题，故正确；

对于 B，是真命题，但有存在量词，不是全称量词命题，故错误；

对于 C，是全称量词命题，根据菱形的性质可得四条边都相等，也是真命题，故正确；

对于 D，是真命题，但不是全称量词命题，故错误.

6. B 【解析】已知“ $\forall x \in \mathbf{R}, 2ax^2+ax-\frac{3}{8}=0$ 无实数根”为真命题.

当 $a=0$ 时， $-\frac{3}{8} \neq 0$ ，满足要求；

当 $a \neq 0$ 时， $\Delta=a^2+3a<0$ ，解得 $-3<a<0$ ，所以实数 a 的取值范围是 $\{a \mid -3<a \leq 0\}$. 故选 B.

7. A 【解析】对于①，2 是素数，则有素数不是奇数，故①错误；

对于②，因为集合 M, N 都是点集，所以 $M \cap N$ 也应是点集，而 $\{1, 2\}$ 不是点集，故②错误；

对于③，因为“ $\forall 1 \leq x \leq 2, x-a \leq 0$ ”为真命题，所以 $x \leq a$ 在 $x \in [1, 2]$ 上恒成立，所以 $2 \leq a$ ，即 $a \geq 2$ ，故③错误. 故选 A.

8. AD 【解析】选项 A，若“ $\forall x_1 \in M, \exists x_2 \in P, x_1-x_2=0$ ”为真命题， $x_2=x_1$ ，则



$M \subseteq P$, A 正确.

选项 B, 因为 “ $\forall x_1 \in M, \exists x_2 \in P, x_1^2 - x_2^2 = (x_1 + x_2)(x_1 - x_2) = 0$ ” 为真命题, $x_2 = x_1$ 或 $x_2 = -x_1$, 所以 M, P 不一定有包含关系, B 错误.

选项 C, “ $\exists x \in M, x^2 - x = 2$ ” 为真命题, $x^2 - x - 2 = (x - 2)(x + 1) = 0, x = -1$ 或 2 , 如 $M = \mathbf{R}$ 符合, 所以 C 错误.

选项 D, 若 “ $\exists x \in M, |x - 1| \geq 1$ ” 为假命题, 则 “ $\forall x \in M, |x - 1| < 1$ ” 为真命题, $-1 < x - 1 < 1, 0 < x < 2$, 则 $M \subseteq \{x | 0 < x < 2\}$, D 正确. 故选 AD.

9. C 【解析】命题 “所有的素数都不能被 2 整除” 的否定为 “存在一个素数能被 2 整除”. 故选 C.

10. B 【解析】命题 “存在偶数 a , 使数据 $3, 4, 1, a, 5, 7$ 的中位数是偶数” 的否定为 “对任意的偶数 a , 数据 $3, 4, 1, a, 5, 7$ 的中位数不是偶数”. 故选 B.

11. A 【解析】由命题 “ $\exists x \in \mathbf{R}, x^2 + m = 0$ ” 是假命题, 得命题 “ $\forall x \in \mathbf{R}, x^2 + m \neq 0$ ” 是真命题, 即 $\Delta = -4m < 0$, 所以 $m > 0$. 故选 A.

12. A 【解析】命题 “ $\exists x \in \{x | x \leq 1\}, x - m + 2 > 0$ ” 为假命题, 则 “ $\forall x \in \{x | x \leq 1\}, x - m + 2 \leq 0$ ” 为真命题, 即 $\forall x \in \{x | x \leq 1\}, m \geq x + 2$ 恒成立, 故 $m \geq 1 + 2 = 3$, 故 A 正确.

13. ABD 【解析】命题 p 的否定为命题 q : $\exists x \in \mathbf{R}, 3x^2 + 2x + a = 0$, 由题知命题 q 是真命题, 令 $\Delta = 2^2 - 4 \times 3 \cdot a \geq 0$, 解得 $a \leq \frac{1}{3}$, 故当命题 q 为真命题时,

$$a \in \left\{ a \mid a \leq \frac{1}{3} \right\}.$$

根据题意, 结合充分条件的定义, 知所求 a 的范围是集合 $\left\{ a \mid a \leq \frac{1}{3} \right\}$ 的子集. 故选 ABD.

14. 是 【解析】若命题 “ $\exists x \in \mathbf{R}$, 函数 $y = x^2 + 2x + m$ 的图象在 x 轴的下方” 是假命题, 则其否定 “ $\forall x \in \mathbf{R}$, 函数 $y = x^2 + 2x + m$ 的图象在 x 轴的上方或 x 轴上”



为真命题.

若命题“ $\forall x \in \mathbf{R}$, 函数 $y = x^2 + 2x + m$ 的图象在 x 轴的上方或 x 轴上”是真命题, 则其否定“ $\exists x \in \mathbf{R}$, 函数 $y = x^2 + 2x + m$ 的图象在 x 轴的下方”是假命题. 所以两位同学所出题目的条件互为充要条件.

故两位同学所出的题, 求解出的 m 的取值范围是一致的.

15. $\exists x > -3, \frac{3}{2x-4} \geq 0$ 或 $2x-4=0$

【解析】 $\because \frac{3}{2x-4} < 0$ 中隐含了 $2x-4 \neq 0$,

如果只将结论否定为 $\frac{3}{2x-4} \geq 0$, 那么缺少“ $2x-4=0$ ”的情况, \therefore “ $\forall x > -3, \frac{3}{2x-4} < 0$ ”的否定是“ $\exists x > -3, \frac{3}{2x-4} \geq 0$ 或 $2x-4=0$ ”.

易错警示 忽视否定的范围致错

本题容易出现的错误答案是

“ $\exists x > -3, \frac{3}{2x-4} \geq 0$ ”, 这里否定不全面.

16. 【解】(1) 若方程 $x^2 + mx + 1 = 0$ 有两个不相等的负实根 x_1, x_2 ,

$$\text{则} \begin{cases} \Delta = m^2 - 4 > 0, \\ x_1 + x_2 = -m < 0, \text{解得 } m > 2. \\ x_1 x_2 = 1 > 0, \end{cases}$$

因为命题 $\neg p$ 为真, 则命题 p 为假, 所以实数 m 的取值范围为 $\{m \mid m \leq 2\}$.

(2) 若方程 $4x^2 + 4(m-2)x + 1 = 0$ 无实根, 则 $\Delta = 16(m-2)^2 - 16 < 0$, 解得 $1 < m < 3$.

$$\text{若 } p \text{ 真 } q \text{ 假, 则} \begin{cases} m > 2, \\ m \leq 1 \text{ 或 } m \geq 3, \end{cases}$$

解得 $m \geq 3$;

$$\text{若 } p \text{ 假 } q \text{ 真, 则} \begin{cases} m \leq 2, \\ 1 < m < 3, \end{cases}$$

解得 $1 < m \leq 2$.

综上, 实数 m 的取值范围为 $\{m \mid 1 < m \leq 2 \text{ 或 } m \geq 3\}$.

1.5 节测上分

1. B 【解析】ACD 选项中的命题均为全称

量词命题, B 选项中的命题是存在量词命题. 故 B 正确.

2. B 【解析】若两个三角形的面积相等, 由三角形的面积公式可得这两个三角形底与高的乘积相等, 所以两个三角形不一定全等, 故 A 错误;

由矩形的定义可知, 若平行四边形的对角线相等, 则这个四边形是矩形, 故 B 正确;

对于任意实数, $|x| \geq 0$, 故 C 错误;

所有可以被 5 整除的整数, 末尾数字都是 0 或 5, 故 D 错误.

3. B 【解析】当 $a = 0$ 时, $2x + 1 = 0$ 有实数根, 解得 $x = -\frac{1}{2}$, 故符合要求;

当 $a \neq 0$ 时, $\Delta = 4 - 4a \geq 0$,

解得 $a \leq 1$ 且 $a \neq 0$.

综上所述, $a \leq 1$. 故选 B.

4. D 【解析】由题意可知命题“ $\forall x \in \mathbf{R}, \exists n \in \mathbf{N}^*,$ 使得 $n \geq 2x + 1$ ”的否定为“ $\exists x \in \mathbf{R}, \forall n \in \mathbf{N}^*,$ 使得 $n < 2x + 1$ ”. 故选 D.

5. AD 【解析】根据全称量词命题的否定是存在量词命题, 可知 A 正确;

由题意可知, 命题“ $\forall x \in \mathbf{R}, x^2 - 2x - a \neq 0$ ”为真命题, 即 $\Delta = (-2)^2 + 4a < 0$, 即 $a < -1$, 故 B 错误;

取 $a = 1, b = -2$, 满足 $a > b$, 但 $a^2 < b^2$, 故 $a > b$ 不能推出 $a^2 > b^2$, 反过来, 取 $a = -2, b = 1$, 满足 $a^2 > b^2$, 但 $a < b$, 故 $a^2 > b^2$ 也不能推出 $a > b$, 所以“ $a > b$ ”是“ $a^2 > b^2$ ”的既不充分也不必要条件, 故 C 错误;

$x = \sqrt[4]{2}$ 是无理数, $x^2 = \sqrt{2}$ 也是无理数, 故 D 正确. 故选 AD.

6. $\{m | m \leq -2 \text{ 或 } 1 < m < 2\}$ 【解析】若命题 $p: \exists x \in \mathbf{R}, x^2 - 2x + m = 0$ 为真命题, 则 $\Delta = 4 - 4m \geq 0$, 解得 $m \leq 1$.

若命题 $q: \forall x \in \mathbf{R}, x^2 - mx + 1 \neq 0$ 为真命题, 则 $\Delta' = m^2 - 4 < 0$, 解得 $-2 < m < 2$.

因为命题 p, q 一真一假, 所以 p 真 q 假, 或 p 假 q 真.

当 p 真 q 假时,
$$\begin{cases} m \leq 1, \\ m \leq -2 \text{ 或 } m \geq 2, \end{cases} \quad \text{解}$$

得 $m \leq -2$;



当 p 假 q 真时, $\begin{cases} m > 1, \\ -2 < m < 2, \end{cases}$ 解得 $1 < m < 2$.

综上, 实数 m 的取值范围为 $\{m \mid m \leq -2 \text{ 或 } 1 < m < 2\}$.

7. 【解】(1) 命题的否定是“存在实数 m , 方程 $x^2 + x - m = 0$ 没有实数根”, 是真命题;

当 $\Delta = 1 + 4m < 0$, 即 $m < -\frac{1}{4}$ 时, 一元二次方程 $x^2 + x - m = 0$ 没有实数根.

(2) 命题的否定是“任何一个梯形的对角线都不互相平分”, 是真命题;

假设对角线互相平分, 则该四边形就是平行四边形, 不是梯形.

(3) 命题的否定是“存在一个数能被 8 整除, 但不能被 4 整除”, 是假命题.

8. 【解】(1) 命题 $p: \forall x \geq 2, \frac{m}{x-1} \leq \frac{1}{2}$ 为真命题, 即 $\forall x \geq 2, m \leq \frac{1}{2}(x-1)$,

因为 $y = \frac{1}{2}(x-1)$ 随着 x 的增大而增大,

所以当 $x = 2$ 时, $y = \frac{1}{2}(x-1) (x \geq 2)$ 取得

最小值 $\frac{1}{2}$, 所以 $m \leq \frac{1}{2}$, 即 m 的取值范围

为 $\left\{m \mid m \leq \frac{1}{2}\right\}$.

(2) 若命题 $q: \exists x \in \mathbf{R}, x^2 - 2x + 2 - m = 0$ 为真命题, 则 $\Delta = 4 - 4(2 - m) \geq 0$,

解得 $m \geq 1$, 若命题 p 为假命题, 则 $m > \frac{1}{2}$,

因为命题 p 为假命题且命题 q 为真命题, 所以 $m \geq 1$, 即 m 的取值范围为 $\{m \mid m \geq 1\}$.

真题上分

1. A 【解析】 因为 $U = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, $\complement_U M = \{1, 3\}$, 则 $2, 4, 5 \in M$, 故选 A.

2. C 【解析】 依题意 $A \cap B$ 的元素是直线 $x + y = 8$ 上满足 $x, y \in \mathbf{N}^*$ 且 $y \geq x$ 的点, 即点 $(1, 7), (2, 6), (3, 5), (4, 4)$. 故选 C.

3. B 【解析】 由题意知 $0 \in B$. 当 $a - 2 = 0$ 时, 即 $a = 2$, 此时 $A = \{0, -2\}$, $B = \{1, 0, 2\}$, $A \not\subseteq B$, 不符合题意.

当 $2a - 2 = 0$ 时, 即 $a = 1$, 此时 $A = \{0, -$



$1\}$, $B = \{1, -1, 0\}$, 满足 $A \subseteq B$, 所以 $a = 1$, 故选 B.

4. A 【解析】由题意可知 $-1 \in B$, $-1 \in A$, $0 \in B$, $0 \in A$, $-3 \notin A$, $2 \notin A$, $3 \notin A$, 所以 $A \cap B = \{-1, 0\}$. 故选 A.

一题多解

由题意知 $A = \{x \mid -\sqrt[3]{5} < x < \sqrt[3]{5}\}$, 又 $B = \{-3, -1, 0, 2, 3\}$, 则 $A \cap B = \{-1, 0\}$, 故选 A.

5. C 【解析】因为集合 $M = \{x \mid -3 < x < 1\}$, $N = \{x \mid -1 \leq x < 4\}$, 所以 $M \cup N = \{x \mid -3 < x < 4\}$. 故选 C.

6. D 【解析】 $\because A = \{1, 2, 3, 4, 5, 9\}$, $\therefore B = \{x \mid \sqrt{x} \in A\} = \{1, 4, 9, 16, 25, 81\}$, $\therefore A \cap B = \{1, 4, 9\}$, $\therefore \complement_A(A \cap B) = \{2, 3, 5\}$, 故选 D.

7. B 【解析】集合 $A = \{1, 2, 3, 4\}$, 集合 $B = \{2, 3, 4, 5\}$, 则 $A \cap B = \{2, 3, 4\}$, 故选 B.

8. A 【解析】因为 $U = \{x \mid x = 3k \text{ 或 } x = 3k+1 \text{ 或 } x = 3k+2, k \in \mathbf{Z}\}$, 所以 $\complement_U(M \cup N) = \{x \mid x = 3k, k \in \mathbf{Z}\}$, 故选 A.

9. A 【解析】因为 $M = \{x \mid x < 1\}$, $N = \{x \mid -1 < x < 2\}$, 所以 $M \cup N = \{x \mid x < 2\}$, $\complement_U M = \{x \mid x \geq 1\}$, $M \cap N = \{x \mid -1 < x < 1\}$, $\complement_U N = \{x \mid x \leq -1 \text{ 或 } x \geq 2\}$, 所以 $\complement_U(M \cup N) = \{x \mid x \geq 2\}$, $N \cup \complement_U M = \{x \mid x > -1\}$, $\complement_U(M \cap N) = \{x \mid x \leq -1 \text{ 或 } x \geq 1\}$, $M \cup \complement_U N = \{x \mid x < 1 \text{ 或 } x \geq 2\}$, 故选 A.

10. B 【解析】依题意可知, 若 $a^2 = b^2$, 则 $a = b$ 或 $a = -b$.

当 $a = b$ 时, $a^2 + b^2 = 2ab$; 当 $a = -b$ 时, $a^2 + b^2 \neq 2ab$.

若 $a^2 + b^2 = 2ab$, 即 $(a-b)^2 = 0$, 则 $a = b$, 所以 $a^2 = b^2$.

所以“ $a^2 = b^2$ ”是“ $a^2 + b^2 = 2ab$ ”的必要不充分条件. 故选 B.

11. C 【解析】充分性: 当 $x+y=0$ 时, $\frac{x}{y} +$

$$\frac{y}{x} = \frac{(x+y)^2 - 2xy}{xy} = -2;$$

$$\text{必要性: } \frac{x}{y} + \frac{y}{x} = \frac{(x+y)^2 - 2xy}{xy} = \frac{(x+y)^2}{xy} -$$



$2 = -2$, 即 $\frac{(x+y)^2}{xy} = 0$, 又 $xy \neq 0$, 所以

$(x+y)^2 = 0$, 即 $x+y=0$,

所以“ $x+y=0$ ”是“ $\frac{x}{y} + \frac{y}{x} = -2$ ”的充分

必要条件. 故选 C.

12. B 【解析】对于命题 p , 当 $x = -1$ 时, $|x+1| = 0 < 1$, 所以 p 是假命题, $\neg p$ 是真命题.

对于命题 q , 若 $x^3 = x$, 则 $x = -1, 0, 1$, 所以满足“ $\exists x > 0, x^3 = x$ ”, 故 q 是真命题, $\neg q$ 是假命题. 故选 B.

素养上分

1. B 【解析】当 A 中元素的最小值为 1 时, 不符合题意.

当 A 中元素的最小值为 2 时, 集合 A 为 $\{2\}, \{2, 3\}, \{2, 4\}, \{2, 3, 4\}$,

集合 $B = \{1\}$, 集合对 (A, B) 的个数为 4;

当 A 中元素的最小值为 3 时, 集合 A 为 $\{3\}, \{3, 4\}$,

集合 B 为 $\{1\}, \{2\}, \{1, 2\}$, 集合对 (A, B) 的个数为 6;

当 A 中元素的最小值为 4 时, 集合 A 为 $\{4\}$, 集合 B 为 $\{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1, 2\}, \{1, 3\}, \{2, 3\}, \{1, 2, 3\}$, 集合对 (A, B) 的个数为 7.

综上, 所有集合对 (A, B) 的个数为 $4+6+7=17$. 故选 B.

2. C 【解析】根据自恋数定义可知, 所有一位正整数都是自恋数, 即 $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\} = A$,

而 $B = \left\{ x \mid \frac{3}{2} < x < 7 \right\}$,

所以 $A \cap B = \{2, 3, 4, 5, 6\}$, 即 $A \cap B$ 中共有 5 个元素,

因此 $A \cap B$ 的子集个数为 $2^5 = 32$. 故选 C.

3. C 【解析】若 $\triangle ABC$ 中有一个角是 36° , 则其他两个角度数不确定, 故不能推出 $\triangle ABC$ 为黄金三角形, 若 $\triangle ABC$ 为黄金三角形, 由题意知 $\triangle ABC$ 中至少有一个角是 36° , 故“ $\triangle ABC$ 中有一个角是 36° ”是“ $\triangle ABC$ 为黄金三角形”的必要不充分



条件,故选 C.

4. D 【解析】“对任意正整数 $n > 2$, 关于 x, y, z 的方程 $x^n + y^n = z^n$ 没有正整数解”的否定为“存在正整数 $n > 2$, 关于 x, y, z 的方程 $x^n + y^n = z^n$ 至少存在一组正整数解”. 故选 D.

5. B 【解析】对于①, 因为 $J(S_2, S_4) = 1 - \frac{|S_2 \cap S_4|}{|S_2 \cup S_4|} = 1$, 所以 $|S_2 \cap S_4| = 0$, 所以 $S_2 \cap S_4 = \emptyset$, 又 $S_2 = \{\text{地理, 物理, 化学}\}$, 所以 $S_4 = \{\text{思想政治, 历史, 生物}\}$, 所以①正确;

对于②, 由 $J(S_1, S_2) = J(S_1, S_4)$, 得

$$\frac{|S_1 \cap S_2|}{|S_1 \cup S_2|} = \frac{|S_1 \cap S_4|}{|S_1 \cup S_4|} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2},$$

所以 $2|S_1 \cap S_4| = |S_1 \cup S_4|$, 所以 $|S_1 \cup S_4|$ 必为偶数, 又 $3 \leq |S_1 \cup S_4| \leq 6$,

当 $|S_1 \cup S_4| = 6$ 时, $|S_1 \cap S_4| = 0$, 不符合 $2|S_1 \cap S_4| = |S_1 \cup S_4|$,

所以 $|S_1 \cup S_4| = 4$ 且 $|S_1 \cap S_4| = 2$, 此时 S_4 情况较多, 比如: $S_4 = \{\text{物理, 地理, 生物}\}$, 所以②错误;

对于③, 若 $S_4 = \{\text{思想政治, 物理, 生物}\}$,

$$\text{则 } J(S_1, S_4) = 1 - \frac{2}{4} = \frac{1}{2}, J(S_2, S_4) = 1 -$$

$$\frac{1}{5} = \frac{4}{5}, J(S_3, S_4) = 1 - \frac{1}{5} = \frac{4}{5},$$

所以 $J(S_1, S_4) < J(S_2, S_4) = J(S_3, S_4)$, 所以③正确;

对于④, 当 $S_4 = \{\text{物理, 地理, 历史}\}$ 时,

$$J(S_1, S_4) = 1 - \frac{1}{5} = \frac{4}{5}, J(S_2, S_4) = 1 -$$

$$\frac{2}{4} = \frac{1}{2}, J(S_3, S_4) = 1 - \frac{2}{4} = \frac{1}{2},$$

满足 $J(S_1, S_4) > J(S_2, S_4) = J(S_3, S_4)$, 但不是 $S_4 = \{\text{思想政治, 地理, 化学}\}$, 所以④错误. 故选 B.

6. C 【解析】若 $A \cup B = \{x \in \mathbf{N}^* \mid x < 7\} = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, 则 $a+2, 2a+1 \in A = \{2, 3, 4, 5, 6\}$, 且 $1, a+2, 2a+1$ 互不相等.

 **提示:** 集合中元素的互异性

若 $a+2=2$, 则 $a=0, 2a+1=1$, 不满足集合中元素的互异性;

若 $a+2=3$, 则 $a=1, 2a+1=3$, 不满足集合



中元素的互异性;

若 $a+2=4$, 则 $a=2$, $2a+1=5$, 符合题意;

若 $a+2=5$, 则 $a=3$, $2a+1=7$, 此时与 $A \cup B = \{x \in \mathbf{N}^* \mid x < 7\} = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ 矛盾;

若 $a+2=6$, 则 $a=4$, $2a+1=9$, 此时与 $A \cup B = \{x \in \mathbf{N}^* \mid x < 7\} = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ 矛盾.

综上所述, $A \cap B = \{4, 5\}$. 故选 C.

第一章 全章上分

1. C 【解析】由题知 $M = \{0, 1, 2, 3\}$, $\complement_{\mathbf{R}} N = \{x \mid x \geq 2\}$, 故 $M \cap (\complement_{\mathbf{R}} N) = \{2, 3\}$. 故 C 正确.

2. D 【解析】对于①, \because “有些”为存在量词, \therefore 命题“有些平行四边形是矩形”是存在量词命题, 故①正确;

对于②, \because “ \forall ”为任意, 是全称量词, \therefore 命题“ $\forall x \in \mathbf{R}, |x| + 1 \geq 1$ ”是全称量词命题, 故②正确;

对于③, “ $\exists x \in \mathbf{R}, x^2 - x + 1 = 0$ ”的否定为“ $\forall x \in \mathbf{R}, x^2 - x + 1 \neq 0$ ”, 故③错误;

对于④, $\because \forall x \in \mathbf{Z}, |x| \geq 0, \therefore |x| \in \mathbf{N}$, 故④正确.

3. B 【解析】因为集合 $A = \{1, 2, 3\}$, $B = \{4, 5\}$, $M = \{x \mid x = a + b, a \in A, b \in B\}$, 所以 $a + b$ 的值可能为 $1 + 4 = 5$, $1 + 5 = 6$, $2 + 4 = 6$, $2 + 5 = 7$, $3 + 4 = 7$, $3 + 5 = 8$, 所以 M 中的元素有 5, 6, 7, 8, 共 4 个.

故 B 正确.

4. C 【解析】由题意, 其身正, 不令而行, 即身正 \Rightarrow 令行, 故“身正”是“令行”的充分条件;

其身不正, 虽令不从, 即令行 \Rightarrow 身正, 所以“身正”是“令行”的必要条件.

综上所述, “身正”是“令行”的充要条件. 故选 C.

5. A 【解析】当 $a = 0$ 时, 方程为 $1 = 0$, 不成立, 不满足条件;

当 $a \neq 0$ 时, $\Delta = a^2 - 4a = 0$, 解得 $a = 4$. 故 A 正确.



6. A 【解析】我们可以把题干集合中的元素看成 x , 由于 $x \in A$ 推不出 $x \in B$, 但 $x \in B$ 能推出 $x \in A$, 所以 $B \subseteq A$, 则 $A \cup B = A$, $A \cap B = B$. 故 A 正确.

7. BD 【解析】 $\because a = b \Rightarrow ac = bc$, 但当 $c = 0$ 时, $ac = bc \not\Rightarrow a = b$, 故“ $a = b$ ”是“ $ac = bc$ ”的充分不必要条件, 故 A 为假命题.

$\because a + 5$ 是无理数 $\Rightarrow a$ 是无理数, a 是无理数 $\Rightarrow a + 5$ 是无理数, 故“ $a + 5$ 是无理数”是“ a 是无理数”的充要条件, 故 B 为真命题.

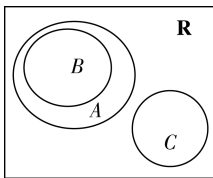
取 $a = 1, b = -2$, 满足 $a > b$, 但 $a^2 < b^2$, 故 $a > b \not\Rightarrow a^2 > b^2$;

取 $a = -4, b = 2$, 满足 $a^2 > b^2$, 但 $a < b$, 故 $a^2 > b^2 \not\Rightarrow a > b$.

故“ $a > b$ ”是“ $a^2 > b^2$ ”的既不充分也不必要条件, 故 C 为假命题;

$\because \{a | a < 5\} \supsetneq \{a | a < 3\}$, 故“ $a < 5$ ”是“ $a < 3$ ”的必要条件, 故 D 为真命题. 故 BD 正确.

8. ABD 【解析】非空集合 A, B, C 都是 \mathbf{R} 的子集, 满足 $B \subseteq A, A \cap C = \emptyset$, 作出 Venn 图, 如图, 由图可知 ABD 正确.



9. AC 【解析】当 $a = 0$ 时, $B = \{1\}$, 满足条件.

当 $a \neq 0$ 时, 若 $B = \{1\}$,

$$\text{则} \begin{cases} \Delta = 1 + 4a = 0, \\ a + 1 - 1 = 0, \end{cases} \quad \text{无解,}$$

$$\text{若 } B = \{0\}, \text{ 则} \begin{cases} \Delta = 1 + 4a = 0, \\ -1 = 0, \end{cases} \quad \text{无解,}$$

$$\text{若 } B = \{0, 1\}, \text{ 则} \begin{cases} \Delta = 1 + 4a > 0, \\ -1 = 0, \\ a + 1 - 1 = 0, \end{cases} \quad \text{无解,}$$

若 $B = \emptyset$, 则 $\Delta = 1 + 4a < 0$, 解得 $a < -\frac{1}{4}$.

综上所述, $a = 0$ 或 $a < -\frac{1}{4}$, 只有 AC 符合条件. 故选 AC.



10.3 【解析】由 $\begin{cases} 1-x^2 \geq 0, \\ x^2-1 \geq 0, \end{cases}$ 解得 $x = \pm 1$,

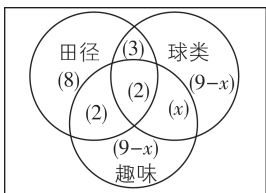
$$\therefore A = \{x \mid y = \sqrt{1-x^2} + \sqrt{x^2-1}\} = \{-1, 1\}.$$

$$\because y = \sqrt{1-x^2} + \sqrt{x^2-1}, \therefore y = 0, \text{ 即 } B = \{y \mid y = \sqrt{1-x^2} + \sqrt{x^2-1}\} = \{0\},$$

$\therefore A \cup B = \{-1, 0, 1\}$, 则集合 $A \cup B$ 中元素的个数为 3.

11.6 【解析】如图所示, 设同时参加趣味比赛和球类比赛的学生有 x 人, 可得 $8+2+2+3+(9-x)+x+(9-x)=30$, 解得 $x=3$.

易知只参加趣味比赛一项的有 6 人.



12. $\left\{m \mid \frac{5}{3} \leq m \leq \frac{7}{3}\right\}$ 【解析】依题意,

$\neg q: 3m-3 < x < 3m+1$, 解题中不等式组可得 $p: 2 < x < 8$.

又 p 是 $\neg q$ 的必要不充分条件, 所以

$$\begin{cases} 3m-3 \geq 2, \\ 3m+1 \leq 8, \end{cases} \text{ 并且两不等式的等号不同时成立,}$$

时成立,

解得 $\frac{5}{3} \leq m \leq \frac{7}{3}$, 即实数 m 的取值范围是

$$\left\{m \mid \frac{5}{3} \leq m \leq \frac{7}{3}\right\}.$$

13. 【解】(1) 因为集合 B 是空集, 所以 $2-$

$a > 1+2a$, 解得 $a < \frac{1}{3}$, 所以实数 a 的取值范围为

$$\left\{a \mid a < \frac{1}{3}\right\}.$$

(2) $A = \{x \mid |x| \leq 3\} = \{x \mid -3 \leq x \leq 3\}$, 由题易知集合 B 不是空集, 则 $2-a \leq 1+$

$2a$, 解得 $a \geq \frac{1}{3}$.

“ $x \in A$ ”是“ $x \in B$ ”的充分不必要条件等价于集合 A 是集合 B 的真子集,

$$\text{则 } \begin{cases} 2-a \leq -3, \\ 1+2a \geq 3, \end{cases} \text{ 两不等式的等号不同时}$$

取到, 解得 $a \geq 5$, 故实数 a 的取值范围



为 $\{a \mid a \geq 5\}$.

14. 【解】(1) 命题 $\neg p$ 为假命题, 则命题 p 为真命题, 即 $a \leq x^2$ 在 $x \in \{x \mid 2 \leq x \leq 3\}$ 时恒成立, 所以 $a \leq (x^2)_{\min} = 4$, 即实数 a 的取值范围是 $\{a \mid a \leq 4\}$.

(2) 命题 $\neg q: \forall x \in \mathbf{R}, x^2 + 2x + 2a \neq 0$,
 $\neg q$ 为真命题, 则 $\Delta = 2^2 - 8a < 0$, 解得
 $a > \frac{1}{2}$.

由(1)可知, 命题 p 为真命题时, $a \leq 4$,
 所以命题 p 和 $\neg q$ 均为真命题时, 实数

a 的取值范围为 $\left\{a \mid \frac{1}{2} < a \leq 4\right\}$.

15. 【解】(1) 当 $a = 2$ 时, $A = \{x \mid 1 \leq x \leq 5\}$,

因为 $B = \{x \mid x < 0 \text{ 或 } x > 4\}$,

所以 $A \cap B = \{x \mid 1 \leq x \leq 5\} \cap \{x \mid x < 0$
 或 $x > 4\} = \{x \mid 4 < x \leq 5\}$,

$A \cup B = \{x \mid 1 \leq x \leq 5\} \cup \{x \mid x < 0 \text{ 或 } x >$
 $4\} = \{x \mid x < 0 \text{ 或 } x \geq 1\}$.

(2) 由 $A \cap (\complement_{\mathbf{R}} B) = A$, 知 $A \subseteq (\complement_{\mathbf{R}} B)$, 由
 题可知 $\complement_{\mathbf{R}} B = \{x \mid 0 \leq x \leq 4\}$.

当 $A = \emptyset$ 时, $3 - a > 3 + a$, 解得 $a < 0$, 与 $a > 0$
 矛盾, 舍去;

当 $A \neq \emptyset$ 时,
$$\begin{cases} a > 0, \\ 3 - a \leq 3 + a, \\ 3 - a \geq 0, \\ 3 + a \leq 4, \end{cases} \quad \text{解得 } 0 < a \leq 1.$$

综上, 实数 a 的取值范围为 $\{a \mid 0 < a \leq 1\}$.